II (муниципальный) этап Всероссийской олимпиады школьников 2024–2025 г.г.

Математика
11 класс
Решения и основные критерии оценивания

Каждая задача оценивается из 7 баллов. Участники олимпиады могут предложить полные и верные решения задач, отличные от приведённых ниже. За это они должны получить полный балл. Частичное решение (в том числе и отличное от приведенного в “ключах”) или решение с ошибками оценивается, ориентируясь на этапы решения, приведённые в разбалловке, и в соответствии со здравым смыслом. Если какой-то этап решения не полный, или частично правильный, то он оценивается частью баллов за этап. Если в решении участника олимпиады предложенные этапы объединены как один, то оценка проводится из суммарного балла.

При проверке следует придерживаться принципов единообразия и монотонности, то есть за одни и те же или схожие продвижения учащиеся должны получать одно и то же количество баллов, а из двух решений одной и той же задачи, одно из которых содержит существенно бо́льшие продвижения, чем другое, именно первое должно быть оценено более высоким баллом.

В разбалловке положительные баллы указывают количество баллов, которое присуждается за соответствующие продвижения в решении задачи, а отрицательные баллы — сколько баллов необходимо снять за ту или иную ошибку. Верные выводы из ошибочных допущений не добавляют баллов.

11.1. *Сейчас Асе в полтора раза меньше лет, чем будет Васе через 2 года. А когда Васе было столько лет, сколько Асе сейчас, Асе было в два раза меньше лет, чем Васе было за два года до настоящего момента. Найти возраст Аси и Васи.*

Ответ. Асе 16 лет, Васе 22.

Решение. Пусть возраст Аси a, а возраст Васи v. Тогда из первого условия получаем $\frac{3}{2}a = v + 2$. Чтобы записать уравнение, соответствующее второму условию, отметим, что когда Васе было столько же лет, сколько Асе сейчас, Васе было a лет, то есть это было $v - a$ лет назад. Отсюда получаем $2(a - (v - a)) = v - 2$. Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{3}{2}a &= v+2 \\ 2(a-(v-a)) &= v-2 \end{cases}; \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{3}{2}a &= v+2 \\ 2(2a-v) &= v-2 \end{cases}; \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3a &= 2(v+2) \\ 4a-2v &= v-2 \end{cases}; \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3a &= 2v+4 \\ 4a-3v &= -2 \end{cases}; \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3a-2v &= 4 \\ 4a-3v &= -2 \end{cases}.$$

Умножим первое уравнение на три и отнимем от него удвоенное второе уравнение, получим

$$3(3a-2v) - 2(4a-3v) = 3 \cdot 4 - 2 \cdot (-2) \quad \Leftrightarrow \quad 9a - 6v - 8a + 6v = 12 + 4 \quad \Leftrightarrow \quad a = 16$$

Подставив полученное значение a в первое из уравнений исходной системы, получим

$$\frac{3}{2} \cdot 16 = v + 2 \quad \Leftrightarrow \quad 24 = v + 2 \quad \Leftrightarrow v = 22.$$

№	**Этапы решения**	**баллы**
1	Выписано одно из двух уравнений аналогичных тем, что используются в Решении	1 балл

№	**Этапы решения**	**баллы**
2	Выписаны оба уравнения или выписано уравнение с одной неизвестной	3 балла
3	Решение полученной системы уравнений	4 балла
4	Каждая арифметическая ошибка	−1 балл
5	Только ответ	0 баллов
6	Ответ с проверкой	1 балл
7	Если найден возраст кого-то одного, а про второго человека забыли	−2 балла

11.2. *В треугольнике $\boldsymbol{ABC}$ проведена биссектриса $\boldsymbol{AD}$. Найти углы треугольника $\boldsymbol{ABC}$, если известно, что центр окружности, описанной около треугольника $\boldsymbol{ABC}$ совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник $\boldsymbol{ACD}$.*

Ответ. $\angle \boldsymbol{ACB} = 36^\circ$, $\angle \boldsymbol{BAC} = \angle \boldsymbol{ABC} = 72^\circ$.

Решение. Пусть $\boldsymbol{O}$ — центр обеих окружностей (см. рис. 11). Пусть $\angle \boldsymbol{OAC} = \alpha$. Так как $\boldsymbol{AO}$ — биссектриса угла $\boldsymbol{CAD}$ (центр вписанной окружности является точкой пересечения биссектрис треугольника), $\angle \boldsymbol{OAD} = \angle \boldsymbol{OAC} = \alpha$. Следовательно $\angle \boldsymbol{DAC} = \angle \boldsymbol{OAD} + \angle \boldsymbol{OAC} = \alpha + \alpha = 2\alpha$.

Так как, по условию $\boldsymbol{AD}$ — биссектриса $\angle \boldsymbol{CAB}$, имеем $\angle \boldsymbol{BAD} = \angle \boldsymbol{DAC} = 2\alpha$, а значит $\angle \boldsymbol{BAC} = \angle \boldsymbol{BAD} + \angle \boldsymbol{DAC} = 2\alpha + 2\alpha = 4\alpha$, а $\angle \boldsymbol{BAO} = \angle \boldsymbol{BAD} + \angle \boldsymbol{OAD} = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$.

Рассмотрим $\triangle \boldsymbol{AOC}$. Он равнобедренный, так как в нем $\boldsymbol{OA} = \boldsymbol{OC}$ как радиусы описанной около $\triangle \boldsymbol{ABC}$ окружности. Откуда $\angle \boldsymbol{OCA} = \angle \boldsymbol{OAC} = \alpha$.

В силу того, что $\boldsymbol{CO}$ — биссектриса $\angle \boldsymbol{ACB}$ (так как центр вписанной в треугольник окружности является точкой пересечения его биссектрис), получаем $\angle \boldsymbol{BCO} = \angle \boldsymbol{ACO} = \alpha$, следовательно $\angle \boldsymbol{BCA} = \angle \boldsymbol{BCO} + \angle \boldsymbol{ACO} = \alpha + \alpha = 2\alpha$.

Рассмотрим $\triangle \boldsymbol{BOC}$. Он равнобедренный, так как в нем $\boldsymbol{OB} = \boldsymbol{OC}$ как радиусы описанной около $\triangle \boldsymbol{ABC}$ окружности. Откуда $\angle \boldsymbol{OBC} = \angle \boldsymbol{OCB} = \alpha$.

Наконец, рассмотрим $\triangle \boldsymbol{AOB}$. Он равнобедренный, так как в нем $\boldsymbol{OB} = \boldsymbol{OA}$ как радиусы описанной около $\triangle \boldsymbol{ABC}$ окружности. Откуда $\angle \boldsymbol{OBA} = \angle \boldsymbol{AOB} = 3\alpha$, а значит $\angle \boldsymbol{ABC} = \angle \boldsymbol{OBC} + \angle \boldsymbol{OBA} = \alpha + 3\alpha = 4\alpha$.

Так как сумма углов в треугольнике равна 180°, получаем

$$\begin{aligned} \angle \boldsymbol{ABC} + \angle \boldsymbol{ACB} + \angle \boldsymbol{BAC} &= 180^\circ \\ 4\alpha + 2\alpha + 4\alpha &= 180^\circ \\ 10\alpha &= 180^\circ \\ \alpha &= 18^\circ \end{aligned}$$

Отсюда $\angle \boldsymbol{ABC} = \angle \boldsymbol{BAC} = 4 \cdot 18^\circ = 72^\circ$, а $\angle \boldsymbol{ACB} = 2 \cdot 18^\circ = 36^\circ$.

№	**Этапы решения**	**баллы**
1	Выражение каждого из углов $\triangle \boldsymbol{ABC}$ через α	1 балл
2	Выражение двух из трех углов $\triangle \boldsymbol{ABC}$ через α	3 балла
3	Всех углов $\triangle \boldsymbol{ABC}$ через α	5 баллов
4	Вычисление градусных мер углов из их выражений через α	2 балла
5	Если не найдена градусная мера одного или двух углов	−1 балл за каждый
6	Каждая арифметическая ошибка	−1 балл
7	Только ответ	0 баллов
8	Ответ с проверкой	1 балл

11.3. *В соревнованиях по футболу принимало участие 12 команд. Каждая команда сыграла с каждой по одному разу. За победу присуждалось 3 очка, за поражение — 0, а в случае ничьей обе команды получали по 1 очку. По итогам турнира оказалось, что все команды набрали различное число очков, а команды, занявшие первое и последнее места, набрали соответственно 21 и 10 очков. Сколько матчей в турнире завершились вничью?*

Ответ. 12 ничьих

Решение. Упорядочим команды по количеству набранных очков: пусть команда, занявшая последнее место, набрала a_1 очков, команда, занявшая предпоследнее место — a_2 очков, и так далее, победитель набрал a_{12} очков. Так как

$$\begin{aligned} a_2 &\geqslant a_1 + 1, \\ a_3 &\geqslant a_2 + 1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{12} &\geqslant a_{11} + 1; \end{aligned} \tag{1}$$

получаем, подставляя предпоследнее неравенство в последнее, предпредпоследнее в предпоследнее и так далее, $a_{12} \geqslant a_1 + 11$. Так как $a_1 = 10$, а $a_{12} = 21$, получаем $a_{12} = a_1 + 11$, а значит все неравенства (1) на самом деле являются равенствами, то каждая команда (кроме последней) набрала ровно на одно очко больше, чем команда, следующая за ней в турнирной таблице. Следовательно, сумма очков набранных командами

$$10 + 11 + \cdots + 21 = \frac{(10 + 21) \cdot 12}{2} = 31 \cdot 6 = 186. \tag{2}$$

С другой стороны, в турнире было сыграно $C_{12}^2 = \dfrac{12 \cdot 11}{2} = 66$ матчей. Если бы в каждом матче одна из команд побеждала, то суммарно команды набрали бы $66 \cdot 3 = 198$ очков. А при замене результата матча с победы одной из команд на ничью, количество очков уменьшается на одно. Таким образом, количество ничьих в этом турнире равно количеству очков, которое команды суммарно “недобрали” по отношению к максимуму, то есть всего было $198 - 186 = 12$ ничьих.

№	**Этапы решения**	**баллы**	Примечания
1	Найдено количество очков, набранных каждой командой	3 балла	
2	Найдено суммарное количество очков, набранных всеми командами	1 балл	суммируется с п.1
3	Каждая арифметическая ошибка	-1 балл	
4	Только ответ	0 баллов	

Замечание. В данной задаче не нужно требовать от участников предоставить пример, подтверждающий возможность подобного турнира (турнирную таблицу с результатами конкретных матчей). Сама формулировка задачи предполагает, что подобная ситуация возможна (и я для того, чтобы убедиться в корректности формулировки этой задачи, построил подходящий пример, так что турнир, в котором команды набрали бы 10,11, ..., 21 очко, действительно существует). В этом смысле формулировка отличается от формулировки типа “Оценка плюс пример”, так если бы в задаче требовалось найти минимальное (или максимальное) количество ничьих при тех или иных условиях, то тогда требовалась бы проверка на то, что полученная оценка на их количество реализуется.

11.4. *Доказать, что для любых положительных чисел a, b, c справедливо неравенство*

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geqslant 6.$$

Решение. Докажем вспомогательное неравенство:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2 \tag{3}$$

для любых положительных чисел a и b. В силу положительности чисел, обе части равенства можно домножить на ab и получить эквивалентное неравенство

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab,$$

которое преобразуется следующим образом:

$$a^2 + b^2 - 2ab \geqslant 0;$$
$$(a-b)^2 \geqslant 0.$$

Последнее неравенство, очевидно, верно для любых положительных a и b, а значит выполнено и исходное.

Аналогично получаем

$$\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geqslant 2; \tag{4}$$
$$\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 2. \tag{5}$$

Складывая (3), (4) и (5), получаем

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) \geqslant 6,$$
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} \geqslant 6,$$
$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geqslant 6;$$

что и требовалось.

№	**Этапы решения**	**баллы**
1	Доказано неравенство $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$ (Доказательство может быть не столь подробным, как в приведенном решении. Достаточно сослаться на “неравенство Коши”, “неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим” и т. п. Хотя не предполагается, что все участники олимпиады знакомы с ним, тем не менее некоторые из участников могут его знать)	3 балла
2	Получение из п. 1 требуемого неравенства	4 балла

11.5. *Для натурального $n \geqslant 2$ определим $f(n) = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right]$. Доказать, что последовательность $f(2), f(3), \ldots$ содержит бесконечно много составных чисел. Через $[x]$ обозначается целая часть числа, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.*

Решение. Несложно видеть, что $\left[\dfrac{n-1}{m}\right] < \left[\dfrac{n}{m}\right]$ в том и только том случае, когда n делится на m. Пусть $n = 3p$, где p нечетное простое число, отличное от 3. Тогда для $m = 2, 3, \ldots n$ имеем

$$\left[\frac{pq-1}{m}\right] = \begin{cases} \left[\dfrac{pq}{m}\right], & \text{если } m \neq 3, p; \\ \left[\dfrac{pq}{m}\right] + 1, & \text{если } m = 3 \text{ или } p. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(3p) - f(3p-1) &= \left(\left[\frac{3p}{2}\right] + \left[\frac{3p}{3}\right] + \cdots + \left[\frac{3p}{3p}\right]\right) - \left(\left[\frac{3p-1}{2}\right] + \left[\frac{3p-1}{3}\right] + \cdots + \left[\frac{3p-1}{3p-1}\right]\right) \\ &= \left(\left[\frac{3p}{2}\right] - \left[\frac{3p-1}{2}\right]\right) + \left(\left[\frac{3p}{3}\right] - \left[\frac{3p-1}{3}\right]\right) + \cdots + \left(\left[\frac{3p}{3p-1}\right] - \left[\frac{3p-1}{3p-1}\right]\right) + \left[\frac{3p}{3p}\right] \\ &= \left(\left[\frac{3p}{p}\right] - \left[\frac{3p-1}{p}\right]\right) + \left(\left[\frac{3p}{q}\right] - \left[\frac{3p-1}{q}\right]\right) + \left[\frac{3p}{3p}\right] \\ &= 3. \end{aligned}$$

Следовательно, $f(3p-1)$ и $f(3p)$ разной четности, поэтому одно из этих чисел четное. Обозначим через Пусть

$$a_p = \begin{cases} 3p-1, & \text{если } f(3p-1) \text{ четно;} \\ 3p, & \text{если } f(3p) \text{ четно.} \end{cases}$$

Заметим, что $f(n) \geqslant n-1$, так как $\left[\dfrac{n}{m}\right] \geqslant 1$ при $m \leqslant n$. Следовательно, $f(a_p) > 2$ для любого нечетного простого $p \geqslant 5$ (так как $3p - 1 \geqslant 14$), а значит $f(a_p)$ составное.

Осталось отметить, что $3p \neq 3q - 1$ ни для каких простых p и q, так как одно из чисел делится на 3, а другое — нет. Следовательно, все a_p различны. Так как простых чисел бесконечно много, а все $f(a_p)$ составные, получаем множество элементов последовательности $f(2), f(3), \ldots,$ удовлетворяющее условию задачи.

Замечание 1. Можно найти и другие пары последовательных чисел, при которых функция принимает значения разной четности, причем это довольно просто доказать. В качестве примера можно взять, например, пары чисел вида $2^{2m+1} - 1$ и 2^{2m+1}.

№	**Этапы решения**	**баллы**
1	Замечено, что $\left[\dfrac{n-1}{m}\right] < \left[\dfrac{n}{m}\right]$ в том и только том случае, когда n делится на m.	1 балл
2	Идея рассмотреть два последовательных числа, для которых функция $f(n)$ принимает значения разной четности без дальнейших продвижений	1 балл
3	Не доказано, что все найденные числа различны	-2 балла
4	Не доказано, среди полученных четных чисел бесконечно много простых	-1 балл

Замечание 2. Для решения задачи необязательно доказывать что все $f(a_p)$ (или аналогичные значения) будут простыми. Можно, например, доказать, что среди $f(a_p)$ (или их аналогов) нет равных. Для этого например, можно показать, что функция строго возрастает.