

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ
ТЕОРЕТИКО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Муниципальный этап

Шифр _____

Фамилия _____ Имя _____ Отчество _____

Район(ГО) _____

Город/село _____

Школа _____

Шифр _____

II (муниципальный) этап Всероссийской олимпиады школьников
2024–2025 уч.г.

Математика

11 класс

11.1. Сейчас Асе в полтора раза меньше лет, чем будет Васе через 2 года. А когда Васе было столько лет, сколько Асе сейчас, Асе было в два раза меньше лет, чем Васе было за два года до настоящего момента. Найти возраст Аси и Васи.

11.2. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD . Найти углы треугольника ABC , если известно, что центр окружности, описанной около треугольника ABC совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ACD .

11.3. В соревнованиях по футболу принимало участие 12 команд. Каждая команда сыграла с каждой по одному разу. За победу присуждалось 3 очка, за поражение — 0, а в случае ничьей обе команды получали по 1 очку. По итогам турнира оказалось, что все команды набрали различное число очков, а команды, занявшие первое и последнее места, набрали соответственно 21 и 10 очков. Сколько матчей в турнире завершились вничью?

11.4. Доказать, что для любых положительных чисел a, b, c справедливо неравенство

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq 6.$$

11.5. Для натурального $n \geq 2$ определим $f(n) = \left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n}{3} \right] + \dots + \left[\frac{n}{n} \right]$. Доказать, что последовательность $f(2), f(3), \dots$ содержит бесконечно много составных чисел. Через $[x]$ обозначается целая часть числа, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x .