II (муниципальный) этап Всероссийской олимпиады школьников 2024–2025 г.г.

Математика
10 класс
Решения и основные критерии оценивания

Каждая задача оценивается из 7 баллов. Участники олимпиады могут предложить полные и верные решения задач, отличные от приведённых ниже. За это они должны получить полный балл. Частичное решение (в том числе и отличное от приведенного в “ключах”) или решение с ошибками оценивается, ориентируясь на этапы решения, приведённые в разбалловке, и в соответствии со здравым смыслом. Если какой-то этап решения не полный, или частично правильный, то он оценивается частью баллов за этап. Если в решении участника олимпиады предложенные этапы объединены как один, то оценка проводится из суммарного балла.

При проверке следует придерживаться принципов единообразия и монотонности, то есть за одни и те же или схожие продвижения учащиеся должны получать одно и то же количество баллов, а из двух решений одной и той же задачи, одно из которых содержит существенно бо́льшие продвижения, чем другое, именно первое должно быть оценено более высоким баллом.

В разбалловке положительные баллы указывают количество баллов, которое присуждается за соответствующие продвижения в решении задачи, а отрицательные баллы — сколько баллов необходимо снять за ту или иную ошибку. Верные выводы из ошибочных допущений не добавляют баллов.

10.1. *Восемь лет назад Даша была вдвое младше Саши, а два года назад Саше было в полтора раза меньше лет, чем будет Даше через 15 лет. Найти возраст Даши и Саши.*

Ответ. Даше 15 лет, Саше 22 года.

Решение. Пусть d — возраст Даши, а s — возраст Саши. Тогда из первого условия получаем, что $2(d-8)=s-8$, а из второго — $\frac{3}{2}(s-2)=d+15$. Решаем систему уравнений.

$$\begin{cases} 2(d-8) &= s-8 \\ \frac{3}{2}(s-2) &= d+15 \end{cases}; \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2d-16 &= s-8 \\ 3(s-2) &= 2(d+15) \end{cases}; \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2d-s &= 8 \\ 3s-6 &= 2d+30 \end{cases}; \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2d-s &= 8 \\ 2d-3s &= -36 \end{cases}.$$

Вычитая из первого уравнения второе, получаем $2s=44$, то есть $s=22$. Теперь подставим найденный возраст Саши в первое из двух уравнений полученной системы, получим

$$2d-22=8 \quad \Leftrightarrow \quad 2d=30 \quad \Leftrightarrow \quad d=15.$$

То есть Даше 15 лет, Саше 22 года.

№	**Этапы решения**	**баллы**
1	Выписано одно из двух уравнений аналогичных тем, что используются в Решении	1 балл
2	Выписаны оба уравнения или выписано уравнение с одной неизвестной	3 балла
3	Решение полученной системы уравнений	4 балла.
4	Если найден возраст кого-то одного, а про второго человека забыли	−2 балла

5	Каждая арифметическая ошибка	−1 балл
6	Только ответ	0 баллов
7	Ответ с проверкой	1 балл

10.2. *Доказать что многочлен $x^{16}-x^{11}+x^6-x^3+1$ при любом x принимает положительные значения.*

Решение. Если $x \leqslant 0$, то x^{16}, x^6 не меньше 0, а x^{11} и x^3 не больше 0, то есть $-x^{11} \geqslant 0$ и $-x^3 \geqslant 0$. Кроме того, $1 > 0$. Следовательно, $x^{16} - x^{11} + x^6 - x^3 + 1 > 0$.

Если $x \in (0,1)$, то $x^m < x^n$ если $m > n$, так как $x^n - x^m = x^n(1-x^{m-n})$ и $1 > x^k$ для любого натурального значения k. Кроме того, $x^l > 0$ для любого натурального l. Следовательно, $x^{16} - x^{11} + x^6 - x^3 + 1 = x^{16} + (-x^{11} + x^6) + (-x^3 + 1) > 0$, так как сумма слагаемых в каждой из двух скобок больше нуля, а x^{16} также больше нуля в силу доказанного выше. $x^m < x^n$ если $m > n$, так как $x^n - x^m = x^n(1 - x^{m-n})$ и $1 < x^k$ для любого натурального значения k.

Наконец, если $x \geqslant 1$, то $x^m \leqslant x^n$ если $m < n$, так как $x^n - x^m = x^n(x^{m-n} - 1)$ и $x^k > 1$ для любого натурального значения k. Тогда $x^{16} - x^{11} + x^6 - x^3 + 1 > x^{16} - x^{11} + x^6 - x^3 = (x^{16} - x^{11}) + (x^6 - x^3) \geqslant 0$ в силу доказанного выше.

№	**Этапы решения**	**баллы**
1	За рассмотрение каждого случая: $x \leqslant 0$, 0<x<1, $x \geqslant 1$ (если разобраны не все случаи)	по 2 балла
2	Каждая арифметическая ошибка	−1 балл

10.3. *В угол вписаны две окружности. Первая окружность касается одной из сторон угла в точке $\boldsymbol{A}$, а вторая окружность касается другой стороны этого угла в точке $\boldsymbol{B}$. Прямая $\boldsymbol{AB}$ пересекает вторично первую и вторую окружности в точках $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{D}$ соответственно. Доказать, что $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{BD}$.*

Решение. Пусть $\boldsymbol{O}$ — вершина искомого угла и пусть, без ограничения общности, $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{E}$ — точки касания меньшей окружности, а $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{F}$ — точки касания большей окружности со сторонами угла (см. рис. 10.1). Тогда, $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{D}$ — точки пересечения отрезка $\boldsymbol{AB}$ с меньшей и большей окружностями соответственно.

В силу равенства отрезков касательных, проведенных из одной точки, $\boldsymbol{OA} = \boldsymbol{OE}$ и $\boldsymbol{OF} = \boldsymbol{OB}$. Следовательно,

$$\boldsymbol{FA} = \boldsymbol{OF} - \boldsymbol{OA} = \boldsymbol{OB} - \boldsymbol{OE} = \boldsymbol{BE}. \tag{1}$$

По свойству касательной и секущей, проведенных из одной точки к меньшей окружности, получаем $\boldsymbol{BE}^2 = \boldsymbol{BC} \cdot \boldsymbol{AB}$, откуда

$$\boldsymbol{BC} = \frac{\boldsymbol{BE}^2}{\boldsymbol{AB}}. \tag{2}$$

Аналогично для большей окружности $\boldsymbol{AF}^2 = \boldsymbol{AD} \cdot \boldsymbol{AB}$, откуда

$$\boldsymbol{AD} = \frac{\boldsymbol{AF}^2}{\boldsymbol{AB}}. \tag{3}$$

Из равенства отрезков $\boldsymbol{FA}$ и $\boldsymbol{BE}$ (равенство (1)), а также из равенств (2) и (3) следует, что $\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{AD}$.

Осталось заметить, что

$$\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BC} = \boldsymbol{AB} - \boldsymbol{AD} = \boldsymbol{BD},$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Отметим, что приведенное решение не меняется и в случае если окружности пересекаются (см. рис. 10.2).

№	**Этапы решения**	**баллы**	Примечание
1	Если приведенное решение не проходит в одном из двух случаев (окружности пересекаются\не пересекаются)	-2 балла	
2	Доказано, что отрезки общих касательных между точками касания равны	1 балл	
3	Получение одного из равенств (2) или (3)	2 балла	суммируется с п. 2
4	Получение обоих равенств (2) или (3)	3 балла	суммируется с п. 2

10.4. *Доказать, что существует бесконечно много положительных нечетных чисел, не представимых в виде* $5^k + 11^m + 19^n$ *для некоторых натуральных чисел* k, m, n.

Решение. Имеем

$$5^0 \equiv 1 (\bmod 5), \quad 5^k \equiv 0 (\bmod 5);$$
$$11^m \equiv 1^m \equiv 1 (\bmod 5);$$
$$19^n \equiv (-1)^n (\bmod 5), \text{ то есть } 19^n \equiv 1 (\bmod 5) \text{ при четном } n \text{ и}$$
$$19^n \equiv -1 \equiv 4 (\bmod 5) \text{ при нечетном } n.$$

Найдем, какие остатки при делении на 5 может давать число $5^k + 11^m + 19^n$, для этого для начала найдем остатки от деления $5^k + 19^n$ на 5. Если $k \geqslant 1$, то $5^k + 19^n$ при делении на 5 может давать остатки 1 и 4, а $5^0 + 19^n$ может давать остатки 2 или 0. То есть $5^k + 19^n$ может давать остатки $0, 1, 2, 4$.

Так как 11^m может давать только остаток 1 при делении на 5, число $5^k + 11^m + 19^n$ может давать при делении на 5 остатки $1, 2, 3, 0$. Среди возможных остатков нет 4. Следовательно, ни одно число вида $5a + 4$, где a — натуральное, не представимо в виде $5^k + 11^m + 19^n$. Осталось заметить, что среди чисел вида $5a + 4$ бесконечно много нечетных, а именно, такое число будет нечетным при любом нечетном a.

Замечание. Возможно, участники олимпиады будут рассматривать остатки от деления на другие числа, например, они могут рассмотреть последнюю цифру числа (остаток от деления на 10). Необходимо аккуратно проверять, осуществимо ли аналогичное решение для соответствующего числа.

№	**Этапы решения**	**баллы**	Примечание
1	Идея рассмотреть остатки от деления на подходящее число (должно быть выбрано число, для которого решение подобное приведенному проходит) без дальнейших продвижений	1 балл	
2	Выписаны остатки от деления 5^k, 11^m, 19^n на выбранное число (см. предыдущий пункт)	3 балла	не суммируется с п. 1
3	Найдены все остатки от деления $5^k + 11^m + 19^n$ на выбранное число (см. п.п. 1,2)	3 балла	суммируется с п. 2
4	Не учтен случай $k = 0$	-3 балла	
5	Забыт один из остатков при делении 19^n на 5	-3 балла	
6	Каждая арифметическая ошибка	-1 балл	

10.5. *В букинистической лавке есть 25 детективных книг, цена каждой из которых от 400 до 550 рублей и 30 книг в жанре “ Фантастика”, цена каждой из которых от 600 до 800 рублей. Каждая книга есть в единственном экземпляре. Цены всех книг различны и составляют целое число рублей. Петя, Коля и Вася хотят купить каждый по одной детективной и одной фантастической книге. Доказать, что они смогут выбрать книги так, чтобы потратить одинаковое количество денег.*

Решение. Рассмотрим все возможные наборы из двух книг, одна из которых детектив, а другая — фантастическая. Таких наборов можно собрать $25 \cdot 30 = 750$ (так как книги из разных жанров выбираются независимо друг от друга).

Цены полученных наборов находятся в интервале от $400 + 600 = 1000$ (если выбраны самые дешевые книги каждого жанра) до $550 + 800 = 1350$ рублей (если выбраны самые дорогие обоих жанров). Тогда из условия задачи следует, что цена набора из двух книг, по одной каждого жанра, принимает не более чем 351 различное значение. Так как $750 : 351 > 2$, по принципу Дирихле найдутся хотя бы три набора, имеющие одну цену. Осталось отметить, что все книги в наборах различны, так как все книги имеют разную цену, а значит, если книга одного из жанров в одном из таких наборов стоит дороже, чем книга этого же жанра в другом наборе, то книга другого жанра в первом наборе наоборот дешевле, чем книга другого жанра во втором. Так как все шесть книг этих трех наборов различны, Петя, Коля и Вася смогут купить себе по одному из этих трех наборов каждый, что и требовалось доказать.

№	**Этапы решения**	**баллы**
1	Идея рассмотреть все возможные пары книг, по одной каждого жанра, без дальнейших продвижений	2 балла
2	Неаккуратный подсчет количества различных цен на наборы книг (скорее всего у многих участников их будет 350)	−1 балл
3	Нет пояснения, почему все три набора одинаковой стоимости можно купить одновременно, то есть почему нет книг, которые оказались в нескольких выбранных наборах	−1 балл
4	Каждая арифметическая ошибка	−1 балл