II (муниципальный) этап Всероссийской олимпиады школьников
2024–2025 г.г.

Математика
9 класс
Решения и основные критерии оценивания

Каждая задача оценивается из 7 баллов. Участники олимпиады могут предложить полные и верные решения задач, отличные от приведённых ниже. За это они должны получить полный балл. Частичное решение (в том числе и отличное от приведенного в “ключах”) или решение с ошибками оценивается, ориентируясь на этапы решения, приведённые в разбалловке, и в соответствии со здравым смыслом. Если какой-то этап решения не полный, или частично правильный, то он оценивается частью баллов за этап. Если в решении участника олимпиады предложенные этапы объединены как один, то оценка проводится из суммарного балла.

При проверке следует придерживаться принципов единообразия и монотонности, то есть за одни и те же или схожие продвижения учащиеся должны получать одно и то же количество баллов, а из двух решений одной и той же задачи, одно из которых содержит существенно бо́льшие продвижения, чем другое, именно первое должно быть оценено более высоким баллом.

В разбалловке положительные баллы указывают количество баллов, которое присуждается за соответствующие продвижения в решении задачи, а отрицательные баллы — сколько баллов необходимо снять за ту или иную ошибку. Верные выводы из ошибочных допущений не добавляют баллов.

9.1. *Боря, Володя и Дима решили купить футбольный мяч. Каждый мальчик внес некоторую сумму денег. При этом оказалось, что деньги, внесенные вместе Борей и Володей составляют $\frac{3}{4}$ стоимости мяча, а деньги, внесенные вместе Володей и Димой, составляют $\frac{2}{3}$ стоимости мяча. Какую часть стоимости мяча составляют деньги, внесенные вместе Борей и Димой?*

Ответ. $\dfrac{7}{12}$ от стоимости мяча.

Решение 1. Так как Боря и Володя внесли сумму, составляющую $\dfrac{3}{4}$ стоимости мяча, Дима внес сумму, равную, $1-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$ его стоимости. Аналогично, так как Володя и Дима внесли сумму, равную $\dfrac{2}{3}$ стоимости мяча, Боря внес $1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$ от стоимости мяча. Следовательно, Боря и Дима вместе внесли $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{3+4}{12}=\dfrac{7}{12}$ от стоимости мяча.

Решение 2. Пусть доля денег, внесенных Борей и Димой на покупку мяча, равна x. Тогда имеем $\dfrac{3}{4}+\dfrac{2}{3}+x=2$, так как если сложить суммы, внесенные Борей и Володей, Володей и Димой, а также Борей и Димой, то получим удвоенную стоимость мяча. Тогда получаем

$$x=2-\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{24}{12}-\frac{9}{12}-\frac{8}{12}=\frac{24-9-8}{12}=\frac{7}{12}$$

№	**Этапы решения**	**баллы**	Примечание
1	Вычислена доля Димы или Бори	2 балла	

№	**Этапы решения**	**баллы**	Примечание
2	Вычислены доля и Димы, и Вовы	4 балла	не суммируется с п. 1
3	Составление уравнения (как в решении 2) для нахождения доли Бори и Димы	3 балла	не суммируется с пп. 1,2
4	Каждая арифметическая ошибка	-1 балл	
5	Только ответ	0 баллов	

9.2. *Перед началом урока алгебры на доске было написано уравнение. Вошедший первым в класс хулиган Вася стер одно из чисел, и пришедший после Васи учитель математики Петр Аристархович увидел следующую запись:*

$$(2x^3 - \ldots x^2 + 1)(3x - 7) = 4x^2 - 3 + 11$$

(стертое число обозначено многоточием). Петр Аристархович помнит, что одним из корней уравнения является число 3. Помогите учителю восстановить исходный вид уравнения.

Ответ. $(2x^3 - 4x^2 + 1)(3x - 7) = 4x^2 - 3 + 11$

Решение. Обозначим стертый коэффициент за a. Тогда уравнение можно записать в виде

$$(2x^3 - ax^2 + 1)(3x - 7) = 4x^2 - 3x + 11.$$

Так как число 3 является корнем данного уравнения, подставим это число в уравнение. Должны получить верное равенство.

$$\begin{gathered}
(2 \cdot 3^3 - a \cdot 3^2 + 1)(3 \cdot 3 - 7) = 4 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 11; \\
(2 \cdot 27 - 9a + 1)(9 - 7) = 4 \cdot 9 - 3 \cdot 3 + 11; \\
(55 - 9a) \cdot 2 = 36 - 9 + 11; \\
110 - 18a = 38; \\
-18a = -72; \\
a = 4.
\end{gathered}$$

№	**Этапы решения**	**баллы**	Примечание
1	Идея подставить значение корня в равенство без дальнейших продвижений	2 балла	
2	Каждая арифметическая ошибка	-1 балл	
3	Только ответ	0 баллов	
4	Ответ с проверкой	1 балл	может суммироваться с п. 1

9.3. *Каким количеством нулей оканчивается число $11^{1001} - 1$?*

Ответ. Одним нулем.

Решение. Имеем $11 \equiv 1 (\bmod 10)$, а значит $11^{1001} \equiv 1^{1001} = 1 (\bmod 10)$. Следовательно, $11^{1001} - 1 \equiv 0 (\bmod 10)$, значит 11^{1001} делится на 10 и тем самым оканчивается на нуль.

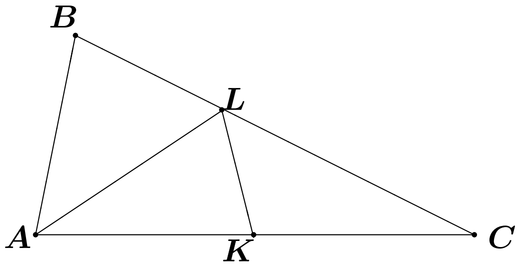
С другой стороны, заметим, что $11^{1001} \equiv 3^{1001} \equiv (-1)^{1001} = -1 (\bmod 4)$. Следовательно, $11^{1001} - 1 \equiv -2 \equiv 2 (\bmod 4)$. Значит это число делится на 2 и не делится на 4. Таким образом, оно также не может делиться на 100, так как $100 = 2^2 \cdot 5^2$. Следовательно, число $11^{1001} - 1$

не может иметь двух (и более) нулей в конце своей записи.

№	**Этапы решения**	**баллы**
1	Доказательство, что число оканчивается хотя бы одним нулем	3 балла
2	Доказательство, что двух и более нулей в конце числа быть не может	4 балла
3	Каждая арифметическая ошибка	-1 балл
4	Только ответ	0 баллов

9.4. *В треугольнике* $\boldsymbol{ABC}$ *с углом* $\boldsymbol{ABC}$ *в два раза большим угла* $\boldsymbol{ACB}$ *проведена биссектриса* $\boldsymbol{AL}$ *угла* $\boldsymbol{BAC}$. *Оказалось, что* $\boldsymbol{AL = AB}$. *Доказать, что* $\boldsymbol{AC = AB + BL}$.

Решение 1. Пусть $\angle \boldsymbol{ACB} = \alpha$, тогда по условию $\angle \boldsymbol{ABL} = 2\alpha$.



Так как $\boldsymbol{AB = AL}$, треугольник $\boldsymbol{ABL}$ равнобедренный и $\angle \boldsymbol{ABL} = \angle \boldsymbol{ALB} = 2\alpha$.

Отложим от луча $\boldsymbol{LA}$ луч, образующий с $\boldsymbol{LA}$ угол, равный углу $\boldsymbol{ALB}$, но в другой полуплоскости относительно $\boldsymbol{LA}$ (см. рис.). Пусть этот луч пересекает прямую $\boldsymbol{AC}$ в точке $\boldsymbol{K}$. Нетрудно видеть, что $\angle \boldsymbol{ALC} > \angle \boldsymbol{ALK}$. Действительно, $\angle \boldsymbol{ALC} = \angle \boldsymbol{ABL} + \angle \boldsymbol{BAL}$, как внешний угол треугольника $\boldsymbol{ABL}$. А $\angle \boldsymbol{ALK} = \angle \boldsymbol{ALB} = \angle \boldsymbol{ABL}$. Таким образом, точка $\boldsymbol{K}$ лежит на стороне $\boldsymbol{AC}$ треугольника $\boldsymbol{ABC}$.

Имеем $\triangle \boldsymbol{ALB} = \triangle \boldsymbol{ALK}$ по стороне и прилежащим к ней углам. Сторона $\boldsymbol{AC}$ общая, $\angle \boldsymbol{ALB} = \angle \boldsymbol{ALK}$ по построению, $\angle \boldsymbol{LAB} = \angle \boldsymbol{LAK}$, так как $\boldsymbol{AL}$ — биссектриса угла $\boldsymbol{BAC}$

Рассмотрим $\triangle \boldsymbol{ALC}$. В нем $\angle \boldsymbol{ALC} = 180^\circ - \boldsymbol{ALB} = 180^\circ - 2\alpha$, а $\angle \boldsymbol{ACL} = \alpha$. Следовательно, $\angle \boldsymbol{LAC} = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) - \alpha = 180^\circ - 180^\circ + 2\alpha - \alpha = \alpha = \angle \boldsymbol{ACL}$. Следовательно, $\triangle \boldsymbol{ALC}$ тоже равнобедренный и $\boldsymbol{AL = LC}$.

Из равенства треугольников $\triangle \boldsymbol{ABL}$ и $\triangle \boldsymbol{AKL}$ следует, что $\triangle \boldsymbol{ALK}$ равнобедренный и $\angle \boldsymbol{AKL} = \angle \boldsymbol{ALK} = \angle \boldsymbol{BLA}$. Следовательно, $\angle \boldsymbol{KLC} = \angle \boldsymbol{LAK} = \alpha$. Действительно, $\angle \boldsymbol{BLA} + \angle \boldsymbol{ALK} + \angle \boldsymbol{KLC} = 180^\circ$ и $\angle \boldsymbol{AKL} + \angle \boldsymbol{ALK} + \angle \boldsymbol{LAK} = 180^\circ$ и утверждение следует из равенства углов $\boldsymbol{BLA}$ и $\boldsymbol{KLC}$, которое было установлено выше.

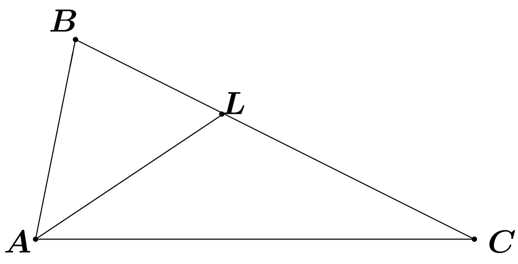
Таким образом, так как $\angle \boldsymbol{LAC} = \angle \boldsymbol{ACL} = \angle \boldsymbol{KLC} = \alpha$, треугольник $\boldsymbol{LKC}$ также равнобедренный и $\boldsymbol{CK = LK}$.

Окончательно имеем

$$\boldsymbol{AC = AK + CK = AK + LK = AB + BL},$$

что и требовалось доказать.

Решение 2. Пусть $\angle \boldsymbol{ACB} = \alpha$, тогда по условию $\angle \boldsymbol{ABL} = 2\alpha$.



Так как $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AL}$, треугольник $\boldsymbol{ABL}$ равнобедренный и $\angle\boldsymbol{ABL} = \angle\boldsymbol{ALB} = 2\alpha$. Тогда $\angle\boldsymbol{BAL} = 180^\circ - 4\alpha$. Так как $\boldsymbol{AL}$ — биссектриса, $\angle\boldsymbol{LAB} = \angle\boldsymbol{LAC} = 180^\circ - 4\alpha$, значит $\angle\boldsymbol{BAC} = \angle\boldsymbol{LAB} + \angle\boldsymbol{LAC} = 180^\circ - 4\alpha + 180\circ - 4\alpha = 360^\circ - 8\alpha$.

В треугольнике $\boldsymbol{BAC}$ имеем

$$\begin{aligned} \alpha + 2\alpha + (360^\circ - 8\alpha) &= 180^\circ; \\ -5\alpha &= -180^\circ \\ \alpha &= 36^\circ \end{aligned}$$

Отсюда $\angle\boldsymbol{ACB} = \alpha = 36^\circ$, $\angle\boldsymbol{ABC} = 2\alpha = 72^\circ$, $\angle\boldsymbol{BAC} = 360^\circ - 8\alpha = 360^\circ - 288^\circ = 72^\circ = \angle\boldsymbol{ABC}$. Значит $\triangle\boldsymbol{ACB}$ равнобедренный и $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{BC}$.

Также в $\triangle\boldsymbol{ALC}$ имеем $\angle\boldsymbol{LAC} = 180^\circ - 4\alpha = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ = \angle\boldsymbol{ACL}$. Следовательно, $\triangle\boldsymbol{ALC}$ равнобедренный и $\boldsymbol{AL} = \boldsymbol{LC}$. Так как $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AL}$ по условию, получаем $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{LC}$. Соответственно, $\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BL} = \boldsymbol{CL} + \boldsymbol{BL} = \boldsymbol{BC} = \boldsymbol{AC}$, что и требовалось.

№	**Этапы решения**	**баллы**	Примечание
1	Идея дополнительного построения $\boldsymbol{LK}$ (см. решение 1)	1 балл	
2	Доказательство, что $\boldsymbol{K}$ лежит на стороне $\boldsymbol{AC}$	1 балл	суммируется с п. 1
3	Доказательство, что $\triangle\boldsymbol{ALK}$ равнобедренный	1 балл	суммируется с пп. 1,2
4	Доказательство, что $\triangle\boldsymbol{ALC}$ равнобедренный	2 балла	суммируется с пп. 1–3 или с пп. 5–6
5	Нахождение α	2 балла	
6	Нахождение углов $\triangle\boldsymbol{ABC}$	1 балл	суммируется с п. 5
7	Выведение из равнобедренности $\triangle\boldsymbol{ALC}$ требуемого равенства на отрезки	2 балла	суммируется с пп. 1–4 или с пп. 4–6, но не со всеми сразу
8	Каждая арифметическая ошибка	−1 балл	

9.5. *По кругу лежат $2n$ монет (n больше 1). Двое играют в следующую игру. Каждый своим ходом берет две соседние кучки монет и объединяет их в одну (отдельно лежащая монета считается кучкой, состоящей из одной монеты). Через $2n-2$ ходов остаются 2 кучки.*
а) Если в каждой из кучек нечетное число монет, то выигрывает первый игрок, если четное — второй.
б) Наоборот, если в каждой кучке четное число монет, то выигрывает первый игрок, а если нечетное, то второй.
Кто выигрывает при правильной игре в каждом случае?

Ответ. И в а), и в б) выигрывает второй игрок.

Решение 1. (Решение п. а)) Так как количество ходов четно, последний ход делает тот, кто ходил вторым.

Заметим, что, так как общее количество в всех кучках монет четно, кучек с нечетным количеством камней перед любым ходом четно. Рассмотрим ситуацию перед последним ходом второго игрока. К этому моменту на столе монеты разложены по трем кучкам. В силу только что высказанного замечания либо во всех кучках будет четное число монет, либо в одной кучке будет четное число монет, а в двух других — нечетное. В любом случае второй игрок своим ходом может объединить две кучки одинаковой четности (так как кучек всего три, эти две кучки находятся по кругу рядом) и эти две кучки превратятся в кучку с четным числом монет, а оставшаяся кучка также будет содержать четное число монет. Таким образом, второй игрок выиграет этим ходом.

Итак, мы можем сформулировать стратегию для второго игрока. Он может делать произвольные ходы до своего последнего хода, а на последнем ходу объединить две кучки одинаковой четности.

Решение 2. (Решение при надлежащем выборе последнего хода годится как для п а), так и для п. б)) Как и в предыдущем решении, заметим, что последний ход делает тот, кто ходил вторым (так как общее число ходов четно). Изначально во всех кучках нечетное количество монет (по одной). Следовательно, первый игрок вынужден получить ровно одну кучку с четным числом монет. Так как эта кучка одна, обе кучки, соседние с ней, имеют нечетное число монет. Таким образом, второй игрок имеет ход, чтобы снова получить ситуацию, когда во всех кучках нечетное число монет. Мы снова вернулись к ситуации, когда любой ход первого игрока приводит к появлению ровно одной кучки с четным числом монет. Соответственно, после каждого хода второго игрока на столе будут кучки только из нечетного числа монет, а после каждого хода первого игрока будет ровно одна кучка с четным числом монет. Тогда после последнего хода первого игрока на столе окажутся три кучки, в двух из которых нечетное число монет, а в одной — четное. Тогда для выигрыша в условиях п. а) второму игроку следует объединить две кучки с нечетным числом монет. В результате получатся две кучки с четным числом монет, а для выигрыша в условиях п. б) второму игроку нужно объдинить две кучки с числом монет разной четности. Тогда он получит кучку с нечетным числом монет и еще одна кучка с нечетным числом уже была перед этим ходом.

№	**Этапы решения**	**баллы**	Примечание
1	Пункт а)	3 балла	если стратегию нельзя легко модернизировать под п. б)
2	Пункт б)	4 балла	если стратегию нельзя легко модернизировать под п. а)
3	Один из пунктов, про второй забыли, если алгоритм легко модернизируется под него	5 баллов	
4	Только ответы	0 балов	