II (муниципальный) этап Всероссийской олимпиады школьников 2024–2025 г.г.

Математика
8 класс
Решения и основные критерии оценивания

Каждая задача оценивается из 7 баллов. Участники олимпиады могут предложить полные и верные решения задач, отличные от приведённых ниже. За это они должны получить полный балл. Частичное решение (в том числе и отличное от приведенного в “ключах”) или решение с ошибками оценивается, ориентируясь на этапы решения, приведённые в разбалловке, и в соответствии со здравым смыслом. Если какой-то этап решения не полный, или частично правильный, то он оценивается частью баллов за этап. Если в решении участника олимпиады предложенные этапы объединены как один, то оценка проводится из суммарного балла.

При проверке следует придерживаться принципов единообразия и монотонности, то есть за одни и те же или схожие продвижения учащиеся должны получать одно и то же количество баллов, а из двух решений одной и той же задачи, одно из которых содержит существенно бо́льшие продвижения, чем другое, именно первое должно быть оценено более высоким баллом.

В разбалловке положительные баллы указывают количество баллов, которое присуждается за соответствующие продвижения в решении задачи, а отрицательные баллы — сколько баллов необходимо снять за ту или иную ошибку. Верные выводы из ошибочных допущений не добавляют баллов.

8.1. *На ярмарке четыре крестьянина купили 28 бочек, из которых 7 заполнены подсолнечным маслом, 7 полны на три четверти, 7 полны лишь на одну четверть и оставшиеся 7 бочек пустые. Как им следует поделить купленное, чтобы все получили поровну бочек и масла? Достаточно привести хотя бы один пример и обосновать его верность.*

Ответ. Можно поделить, например, так.

№ крестьянина	полные	на $\frac{3}{4}$ заполненные	на $\frac{1}{4}$ заполненные	пустые
1	3	0	2	2
2	2	2	0	3
3	2	1	3	1
4	0	4	2	1

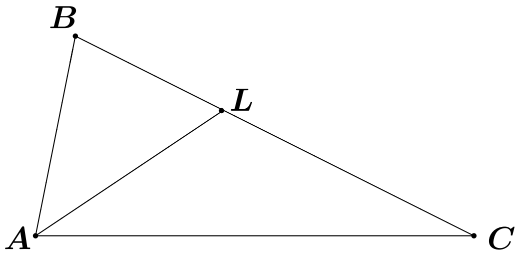
Замечание. Идея построения данного примера состоит в том, чтобы сначала вычислить, сколько бочек и масла нужно каждому крестьянину, а затем набирать нужное количество масла, дополняя долю каждого пустыми бочками до требуемого количества. При этом нужно следить, чтобы не произошло “переполнения”, то есть чтобы количество бочек каждого вида, использованных первыми несколькими (одним, двумя или тремя) крестьянами, не превосходило 7. Именно поэтому третий крестьянин не может взять такой де набор бочек, как второй: в этом случае первым трем крестьянам необходимо 8 пустых бочек.

№	**Этапы решения**	**баллы**
1	Любой верный пример с проверкой	7 баллов
2	Любой верный пример без проверки	5 баллов
3	Любой неверный пример	0 баллов

8.2. *В треугольнике* $\boldsymbol{ABC}$ *угол* $\boldsymbol{ABC}$ *втрое больше угла* $\boldsymbol{ACB}$*, а биссектриса угла* $\boldsymbol{BAC}$ *равна стороне* $\boldsymbol{AB}$*. Найти углы треугольника* $\boldsymbol{ABC}$*.*

Ответ. $\angle \boldsymbol{ACB} = \dfrac{45^\circ}{2}$, $\angle \boldsymbol{ABC} = \dfrac{135^\circ}{2}$, $\angle \boldsymbol{BAC} = 90^\circ$.

Решение. Обозначим через $\boldsymbol{AL}$ — биссектрису угла $\boldsymbol{BAC}$ (см. рис.)



Пусть $\angle \boldsymbol{ACB} = \alpha$, тогда по условию $\angle \boldsymbol{ABC} = 3\alpha$. Отсюда

$$\angle \boldsymbol{BAC} = 180^\circ - \alpha - 3\alpha = 180^\circ - 4\alpha.$$

Так как $\boldsymbol{AL}$ — биссектриса, получаем

$$\angle \boldsymbol{BAL} = \frac{1}{2}\angle \boldsymbol{BAC} = \frac{1}{2}(180^\circ - 4\alpha) = 90^\circ - 2\alpha.$$

С другой стороны, так как $\boldsymbol{AL} = \boldsymbol{AB}$, треугольник $\boldsymbol{ABL}$ равнобедренный. Следовательно, $\angle \boldsymbol{ABC} = \boldsymbol{ABL} = \angle \boldsymbol{BAL} = 180^\circ - 6\alpha$. Следовательно

$$\begin{gathered} 90^\circ - 2\alpha = 180^\circ - 6\alpha \\ 6\alpha - 2\alpha = 180^\circ - 90^\circ \\ 4\alpha = 90^\circ \\ \alpha = \frac{45^\circ}{2} \end{gathered}$$

То есть $\angle \boldsymbol{ACB} = \dfrac{45^\circ}{2}$, $\angle \boldsymbol{ABC} = 3 \times \dfrac{45^\circ}{2} = \dfrac{135^\circ}{2}$, $\angle \boldsymbol{BAC} = 180^\circ - \dfrac{45^\circ}{2} - \dfrac{135^\circ}{2} = 90^\circ$.

№	**Этапы решения**	**баллы**
1	Получено выражение для $\angle \boldsymbol{BAC}$ из $\triangle \boldsymbol{ABC}$ через α	2 балла
2	Получено выражение для $\angle \boldsymbol{BAL}$ из $\triangle \boldsymbol{ABL}$ через α	3 балла
3	Вычисление из равенства значений углов в пп 1,2, чему равно α, а также чему равны остальные углы	2 балла
4	Каждая арифметическая ошибка	-1 балл

8.3. *Можно ли разрезать (по клеткам) квадрат* 8×8 *клеток на пять прямоугольников, у каждого из которых длины сторон нечетны? Ответ обосновать.*

Ответ. Нет.

Решение. Заметим, что если у прямоугольника нечетные длины сторон, то также нечетной будет и площадь (потому как площадь есть произведение перпендикулярных сторон прямоугольника). Если требуемое разрезание возможно, то площадь квадрата равна сумме площадей пяти прямоугольников разбиения, то есть эта площадь равна сумме пяти нечетных чисел, а следовательно нечетна. С другой стороны она равна 64, то есть четному числу. Получили противоречие.

Замечание. Честно говоря, я не знаю, какие критерии могут быть у этой задачи. Скорее всего будет либо чистое решение (как приведенное выше или какое-нибудь другое, например, можно посчитать в квадратах разницу между числом белых и черных клеток), либо ничего, либо какие-нибудь рассуждения, не приводящие к нужному результату. Так что в случае, если появятся нетривиальные рассуждения у участников олимпиады, критерии предлагается разработать проверяющим.

8.4. *В магазине “Все для похода” набор из 3 банок тушенки, 2 банок рыбных консервов и 9 кг печенья стоит 2670 рублей, а набор из 7 банок тушенки, 6 банок рыбных консервов и 5 кг печенья стоит 3030 рублей. Сколько в этом магазине будет стоить набор из 11 банок тушенки, 9 банок рыбных консервов и 13 кг печенья? В магазине продаются тушенка, рыбные консервы и печенье только одного вида.*

Ответ. 5790 рублей.

Решение 1. Обозначим первый из указанных в задаче наборов через A, а второй — через B. Стоимость 3 наборов A и 5 наборов B — $2670 \cdot 3 + 3030 \cdot 5 = 8010 + 15150 = 23160$ рублей. При этом в этих наборах будет $3 \cdot 3 + 5 \cdot 7 = 9 + 35 = 44$ банок тушенки, $3 \cdot 2 + 5 \cdot 6 = 6 + 30 = 36$ банок рыбных консервов и $3 \cdot 9 + 5 \cdot 25 = 27 + 25 = 52$ печенья. Нетрудно видеть, что количество продуктов в 3 наборах A и 5 наборах B ровно в четыре раза больше, чем количество продуктов в наборе, стоимость которого нам надо найти. Отсюда следует, что стоимость этого набора равна $23160 : 4 = 5790$ рублей.

Решение 2. Пусть стоимость одной банки тушенки t рублей, стоимость одной банки рыбных консервов r рублей, а стоимость одного килограмма печенья p рублей. Тогда из стоимости наборов получаем два уравнения.

$$\begin{cases} 3t + 2r + 9p &= 2670 \\ 7t + 6r + 5p &= 3030 \end{cases}.$$

Из первого уравнения

$$\begin{aligned} 3t &= 2670 - 2r - 9p \\ t &= 890 - \frac{2}{3}r - 3p \end{aligned} \tag{1}$$

Подставим это выражение во второе уравнение и выразим p:

$$\begin{aligned} 7\left(890 - \frac{2}{3}r - 3p\right) + 6r + 5p =&3030 \\ 6230 - \frac{14}{3}r - 21p + 6r + 5p =&3030 \\ 21p - 5p =&6230 - 3030 - \frac{14}{3}r + 6r \\ 16p =&3200 + \frac{4}{3}r \\ p =&200 + \frac{1}{12}r \end{aligned}$$

Подставим выражение для p в (1) и выразим цену тушенки через цену рыбных консервов:

$$
\begin{aligned}
t =& 890 - \frac{2}{3}r - 3(200 + \frac{1}{12}r) = \\
=& 890 - \frac{2}{3}r - 600 - \frac{1}{4}r = \\
=& 290 - \frac{11}{12}r
\end{aligned}
$$

Выражение для набора продуктов, стоимость которого надо установить, запишется как $11t + 9r + 13p$. Подставим сюда выражения для t и p. Получим

$$
\begin{aligned}
& 11\left(290 - \frac{11}{12}r\right) + 9r + 13\left(200 + \frac{1}{12}r\right) = \\
=& 3190 - \frac{121}{12}r + 9r + 2600 + \frac{13}{12}r = \\
=& 5790 - \frac{108}{12}r + 9r = \\
=& 5790
\end{aligned}
$$

Таким образом, стоимость требуемого набора продуктов равна 5790 рублей.

Замечание. Первое решение тоже можно расписать с применением переменных, однако изначально целью написания первого решения было показать, как можно обойтись без уравнений. Что касается второго решения, его идея в том, что данную задачу можно решить прямыми вычислениями, без догадки о том, что три первых и пять вторых наборов продуктов в сумме дают учетверённый набор, который надо найти.

№	**Этапы решения**	**баллы**	Примечание
1	Верно записана система уравнений (по одному уравнению для каждого набора продуктов)	1 балл	
2	Из одного из уравнений выражена цена одного из овощей	2 балла	Не суммируется с п.1
3	Из оставшегося уравнения выражена цена еще одного из овощей	3 балла	Не суммируется с п.1, суммируется с п.2
4	Подстановка выражений для двух неизвестных через третье в одно из уравнений	2 балла	Суммируется только с 2 и 3
5	Если участник догадался сложить три первых и пять вторых наборов, но без дальнейших продвижений (хотя это и маловероятно)	3 балла	Не суммируется с пп.1–4
6	Каждая арифметическая ошибка	−1 балл	

8.5. *Назовем пятизначное число хорошим, если разность между любыми двумя его цифрами (от большей цифры отнимается меньшая) не меньше двух. Найти количество хороших чисел.*

Ответ. $5 \cdot 5! = 600$.

Решение. Пусть a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 — цифры (в порядке возрастания), из которых можно составить хорошее пятизначное число. Назовем такой набор цифр хорошим. Рассмотрим разности

$$A_1 = a_1 - 0,\ A_2 = a_2 - a_1,\ A_3 = a_3 - a_2,\ A_4 = a_4 - a_3,\ A_5 = a_5 - a_4,\ A_6 = 9 - a_5.$$

Их сумма равна 9. При этом $A_1 \geqslant 0$, $A_2 \geqslant 2$, $A_3 \geqslant 2$, $A_4 \geqslant 2$, $A_5 \geqslant 2$ и $A_6 \geqslant 0$.

Сложив минимальные значения, которые могут принимать данные разности, получим 8. Следовательно справедливы следующие утверждения:
1. Ни одна из разностей не может принимать значение, большее минимального на 2 и больше.
2. Ровно одна из разностей принимает значение, большее минимального на 1.

Для доказательства обоих утверждение нужно заметить, что если утверждение 1 не выполнено, или, вопреки утверждению два, хотя бы две разности больше минимальных значений на единицу, то $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6$ больше суммы минимальных значений этих разностей (то есть больше чем $0 + 2 + 2 + 2 + 2 + 0 = 8$) хотя бы на 2. А это означает сумма разностей больше 9, противоречие. Если же все разности равны своим минимальным значениям, то, как уже отмечалось, их сумма равна 8, то есть не равна 9, поэтому снова получаем противоречие.

Итак, для любого хорошего набора цифр ровно одна из разностей $A_1, \ldots, A_6$ на единицу больше минимального возможного значения этой разности, а остальные равны этому минимальному значению. Таким образом, существует ровно 6 различных хороших наборов (по числу разностей) цифр. Причем, ровно один такой набор не содержит нуля (когда $A_1 = a_1 = 1$).

Из хорошего набора, содержащего только ненулевые цифры, можно составить 5! хороших чисел. Действительно, на первое место можно поставить любую из пяти цифр, на второе — любую из четырех оставшихся, на третье — любую из трех оставшихся, и так далее.

Если же в наборе есть нуль, то на первое место можно поставить только одну из четырех цифр, на второе место — тоже только одну из четырех (так как на второе место уже можно ставить нуль), на третье — любую из трех цифр, итого получаем $4 \cdot 4!$ вариантов. Так как хороших наборов, содержащих нуль, всего 5, получаем общее количество хороших чисел, в которых есть нуль, равно $5 \cdot 4 \cdot 4! = 4 \cdot 5!$. Таким образом, общее количество хороших пятизначных чисел равно $5! + 4 \cdot 5! = 5 \cdot 5! = 600$.

Замечание 1. Вместо приведенных в решении (довольно длинных) рассуждений, показывающих, что хороших наборов цифр всего шесть, можно просто перебрать их все:

$$0, 2, 4, 6, 8;$$
$$0, 2, 4, 6, 9;$$
$$0, 2, 4, 7, 9;$$
$$0, 2, 5, 7, 9;$$
$$0, 3, 5, 7, 9;$$
$$1, 3, 5, 7, 9;$$

после чего провести те же рассуждения, что приводились в решении выше, для нахождения количества хороших чисел для каждого из наборов. Наверняка подавляющее большинство участников олимпиады пойдет именно по этому пути. Разумеется, такой подход также является верным.

Замечание 2. Необязательно доводить ответ до числа. Выражение вида $5 \cdot 5!$ или нечто подобное также должно считаться верным ответом.

№	**Этапы решения**	**баллы**	Примечание
1	Найдены возможные наборы цифр числа или найдено их число (с указанием в скольких наборах есть нуль)	2 балла	
2	Верно подсчитано число чисел, состоящих из одних и тех же цифр в одном из случаев (есть нуль в записи\нет нуля в записи)	2 балла	суммируется с п. 1
3	Верно подсчитано число чисел, состоящих из одних и тех же цифр в обоих случаях	3 балла	суммируется с п. 1
4	Ошибка, связанная с неверно вычисленным количеством наборов чисел (по конкретным цифрам)	-3 балла	
5	Каждая арифметическая ошибка	-1 балл	
6	Только ответ	0 баллов	