

II (муниципальный) этап Всероссийской олимпиады школьников
2024–2025 г.г.

Математика

7 класс

Решения и основные критерии оценивания

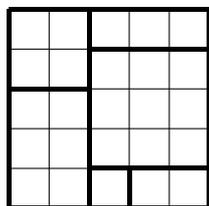
Каждая задача оценивается из 7 баллов. Участники олимпиады могут предложить полные и верные решения задач, отличные от приведённых ниже. За это они должны получить полный балл. Частичное решение (в том числе и отличное от приведенного в “ключах”) или решение с ошибками оценивается, ориентируясь на этапы решения, приведённые в разбалловке, и в соответствии со здравым смыслом. Если какой-то этап решения не полный, или частично правильный, то он оценивается частью баллов за этап. Если в решении участника олимпиады предложенные этапы объединены как один, то оценка проводится из суммарного балла.

При проверке следует придерживаться принципов единообразия и монотонности, то есть за одни и те же или схожие продвижения учащиеся должны получать одно и то же количество баллов, а из двух решений одной и той же задачи, одно из которых содержит существенно бóльшие продвижения, чем другое, именно первое должно быть оценено более высоким баллом.

В разбалловке положительные баллы указывают количество баллов, которое присуждается за соответствующие продвижения в решении задачи, а отрицательные баллы — сколько баллов необходимо снять за ту или иную ошибку. Верные выводы из ошибочных допущений не добавляют баллов.

7.1. Разрезать квадрат 5×5 клеток на пять прямоугольников, среди которых нет равных. Разрезы можно делать только по сторонам клеток.

Ответ. Это можно сделать, например так (существуют и другие способы разрезания):



№	Этапы решения	баллы
1	Любой верный пример разрезания, даже без пояснений	7 баллов
2	Неверный пример	0 баллов

7.2. Сравнить $\frac{2024}{2025}$ и $\frac{20242024}{20252025}$. Ответ обосновать.

Ответ. Числа равны.

Решение. Имеем

$$\frac{20242024}{20252025} = \frac{2024 \cdot 10001}{2025 \cdot 10001} = \frac{2024}{2025}$$

№	Этапы решения	баллы
1	Верный ответ без пояснений	0 баллов

2	Без пояснений утверждается, что $\frac{20242024}{20252025} = \frac{2024}{2025}$	1 балл
3	Каждая арифметическая ошибка	-1 балл

7.3. В одной из школ г. Южно-Сахалинска заведено, что девочки говорят правду девочкам и лгут мальчикам, а мальчики говорят правду мальчикам-одноклассникам и лгут всем остальным. Однажды несколько учеников (среди которых могли быть и мальчики, и девочки) двух классов этой школы встали в круг и каждый сказал своему соседу справа: "Ты девочка". Четно или нечетно количество мальчиков в этом кругу? Ответ пояснить.

Решение. Отметим, что девочки могут располагаться как угодно. Действительно, если у некоторой девочки А сосед справа тоже девочка, то девочка А должна говорить правду, а если у девочки А сосед справа мальчик, то она должна солгать ему.

Докажем, что если в кругу есть девочка, то мальчиков там нет. Действительно, пусть это не так и в кругу стоят как девочки, так и мальчики. Тогда выберем произвольного мальчика и будем двигаться от него против часовой стрелки, пока не дойдем до девочки, обозначим ее В. Так как девочки в кругу есть, это обязательно случится. Тогда рассмотрим мальчика, стоящего перед девочкой В. Он должен солгать ей, а значит не может сказать ей "Ты девочка".

Итак, в кругу стоят либо только девочки, либо только мальчики. Если только девочки, то количество мальчиков 0, то есть четно. Пусть в кругу стоят только мальчики. Тогда каждый мальчик в кругу лжет, так как в этой ситуации утверждение "Ты девочка" не может быть истинным. Следовательно, в круге мальчики из разных классов стоят через одного и количество мальчиков из разных классов должно быть одинаковым. Иначе выберем тот класс, который представлен меньшим количеством мальчиков, пусть их число n , расставим их по кругу, между мальчиками будет n промежутков, если же мальчиков из другого класса больше чем n , то найдется промежуток, куда должны попасть хотя бы два мальчика, значит в этом промежутке найдутся два мальчика из одного класса, стоящие рядом, чего, как было отмечено, быть не может. Таким образом, в этом случае также количество мальчиков должно быть четным.

№	Этапы решения	баллы
1	Доказано, что в кругу могут стоять только дети одного пола без дальнейших продвижений	2 балла
2	Упущен случай, когда в кругу стоят одни мальчики	-3 балла
3	№пущен случай, когда в кругу стоят одни девочки	-2 балла

7.4. Незнайка, практикуясь в умножении чисел на калькуляторе, заметил, что если произведение чисел больше некоторого числа N , то калькулятор выдает символ ошибки "E". Коротышка взял четыре натуральных числа a_1, a_2, a_3, a_4 и умножил каждое из них на каждое из четырех натуральных чисел b_1, b_2, b_3, b_4 , а по результатам умножения составил таблицу, где отметил все случаи, когда калькулятор выдавал "E".

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	E	E		E
a_2	E	E	E	E
a_3	E		E	E
a_4	E			E

Знайка, посмотрев на таблицу, сказал, что Незнайка ошибся при ее составлении. Кто из

коротышек прав и почему?

Ответ. Прав, как и следовало ожидать, Знайка.

Решение. Рассмотрим строчки, соответствующие умножению чисел a_1 и a_3 .

Так как при умножении a_1 на b_3 не возникает ошибки (то есть $a_1b_3 \leq N$), а при умножении a_1 на b_2 ошибка возникает ($a_1b_2 > N$); получаем $a_1b_3 < a_1b_2$. А так как число a_1 натуральное, получаем $b_3 < b_2$.

С другой стороны, так как при умножении a_3 на b_2 ошибки не происходит, а при умножении a_3 на b_3 она возникает, получаем $a_3b_2 < a_3b_3$. Так как число a_3 натуральное, получаем $b_2 < b_3$. Получили противоречие, которое доказывает, что подобная таблица составлена с ошибками.

№	Этапы решения	баллы	Примечание
1	Идея рассмотреть две строки или два столбца без дальнейших продвижений	1 балл	
2	Получено одно из неравенств на числа	3 балла	Не суммируется с п.1

7.5. В магазине “Все для супа” набор из 7 кг картофеля, 4 кг лука и 5 кг моркови стоит 940 рублей, а набор из 5 кг картофеля, 5 кг лука и 1 кг моркови стоит 530 рублей. Сколько в этом магазине будет стоить набор из 4 кг картофеля, 3 кг лука и 2 кг моркови?

Ответ. 490 рублей

Решение 1. Возьмем оба указанных в задаче набора. В этом “сложном” наборе будет 12 кг картофеля, 9 кг лука и 6 кг моркови, и стоимость этого набора будет равна $530 + 940 = 1470$ рублей. Нетрудно видеть, что это количество овощей ровно в три раза больше, чем количество овощей в наборе, стоимость которого нам надо найти. Отсюда следует, что стоимость этого набора равна $1470 : 3 = 490$ рублей.

Решение 2. Пусть стоимость одного килограмма картофеля k рублей, стоимость одного килограмма лука l рублей, а стоимость одного килограмма моркови m рублей. Тогда из стоимости наборов получаем два уравнения.

$$\begin{cases} 7k + 4l + 5m = 940 \\ 5k + 5l + m = 530 \end{cases}$$

Из второго уравнения

$$m = 530 - 5k - 5l. \tag{1}$$

Подставим это выражение в первое уравнение и выразим k :

$$\begin{aligned} 7k + 4l + 5(530 - 5k - 5l) &= 940 \\ 7k + 4l + 2650 - 25k - 25l &= 940 \\ 25k - 7k &= -25l + 4l + 2650 - 940 \\ 18k &= 1710 - 21l \\ k &= 95 - \frac{7}{6}l \end{aligned}$$

Подставим выражение для k в (1) и выразим цену моркови через цену лука:

$$\begin{aligned} m &= 530 - 5\left(95 - \frac{7}{6}l\right) - 5l = \\ &= 530 - 475 + \frac{35}{6}l - 5l = \\ &= 55 + \frac{5}{6}l \end{aligned}$$

Выражение для набора овощей, стоимость которого надо установить, запишется как $4k + 3l + 2m$. Подставим сюда выражения для m и k . Получим

$$\begin{aligned} &4\left(95 - \frac{7}{6}l\right) + 3l + 2\left(55 + \frac{5}{6}l\right) = \\ &= 380 - \frac{28}{6}l + 3l + 110 + \frac{10}{6}l = \\ &= 490 - \frac{14}{3}l + 3l + \frac{5}{3}l = \\ &= 490 - \frac{9}{3}l + 3l = \\ &= 490 \end{aligned}$$

Таким образом, стоимость требуемого набора овощей равна 490 рублей.

Замечание. Первое решение тоже можно расписать с применением переменных, однако, как показывает практика, в седьмом классе школьники еще не очень хорошо умеют работать с уравнениями, поэтому изначально целью написания первого решения было показать, как можно обойтись без уравнений. Что касается второго решения, его идея в том, что данную задачу можно решить прямыми вычислениями, без догадки о том, что первый и второй набор овощей в сумме дают утроенный набор, который надо найти.

№	Этапы решения	баллы	Примечание
1	Верно записана система уравнений (по одному уравнению для каждого набора овощей)	1 балл	
2	Из одного из уравнений выражена цена одного из овощей	2 балла	Не суммируется с п.1
3	Из оставшегося уравнения выражена цена еще одного из овощей	3 балла	Не суммируется с п.1, суммируется с п.2
4	Подстановка выражений для двух неизвестных через третье в одно из уравнений	2 балла	Суммируется только с 2 и 3
5	Если участник догадался сложить первый и второй наборы, но без дальнейших продвижений	3 балла	Не суммируется с пп.1–4
6	Каждая арифметическая ошибка	-1 балл	